# BIST TEKNOLOJİ ENDEKSİNDE ÇOK DEĞİŞKENLİ NORMAL DAĞILIMLARIN KARMASI İLE RİSKE MARUZ DEĞER ANALİZİ

VALUE AT RISK ANALYSIS BY MIXTURE OF THE MULTIVARIATE NORMAL DISTRIBUTIONS IN THE BIST TECHNOLOGY INDEX

**Ülkü ERİŞOĞLU[1]**
**Yasemin KÖROĞLU[2]**

**ÖZET**
Bu çalışmanın amacı finansal risk hesaplama yöntemlerinden biri olan riske maruz değer (RMD) yönteminde, parametrik yaklaşımın uygulanmasında finans verilerinin normal dağılıma uymadığı durumlarda karma dağılım yaklaşımını kullanmaktır. Çalışmada RMD, çok değişkenli normal dağılımların karmasına dayalı olarak hesaplanmıştır. Karma dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri için EM algoritması verilmiştir. Karma dağılım modelinde uygun bileşen sayısı Akaike ve Bayesci bilgi kriterleri ile belirlenmiştir. Uygulamada BIST teknoloji endeksinde yer alan dört hisse senedi incelenmiştir. Hisse senedine eşit ağırlık verilerek oluşturulan portföyün RMD hesaplanmasında klasik ve karma dağılım yaklaşımları karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda finansal varlıkların istatistiksel modellemesinde çok değişkenli normal dağılımların karmasına dayalı modellemenin daha başarılı olduğu görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Riske Maruz Değer (RMD), Karma Dağılım Modeli, EM Algoritması, AIC, BIC

**ABSTRACT**
The purpose of this study is to use the mixture distribution approach in the computation of the value at risk (VaR) by parametric method which is one of the financial risk calculation methods when the financial data is non-normal distribution. In the study, VaR was calculated based on the mixture of multivariate normal distributions. The EM algorithm for the maximum likelihood estimates of the mixture distribution parameters is given. The number of components for the mixture distribution model is determined by Akaike and Bayesian information criteria. In the calculation of VaR for the portfolio which is created by giving equal weight to stocks, classical and mixture distribution approaches are compared. As a result of the comparison, in the statistical modeling of financial assets, modeling based on the mixture of multivariate normal distributions was found to be more successful.

**Keywords:** Value at Risk (VaR), Mixture Distribution Model, EM Algorithm, AIC, BIC

## 1. GİRİŞ

Özellikle son yıllardaki küreselleşme, gelişen piyasalar ve yaşanan ekonomik krizler nedeniyle finans piyasalarındaki dalgalanmaların artış göstermesi ile finansal risk yönetiminin önemi her geçen gün artmaktadır. Basitliği ve etkinliği bakımından riske maruz değer (RMD) finansal risklerin yönetiminde standart ölçü birimi olarak uzun zamandan beri kullanılmaktadır. RMD yöntemi 1994 yılında Morgan tarafından tanımlanmıştır (Morgan, 1995). RMD, belirli bir süre boyunca piyasa riskine maruz kalma nedeniyle belirli bir güven düzeyinde meydana gelebilecek kaybı açıklar (Basak ve Shapiro,2001).

RMD yöntemi ile ilgili literatür klasik yaklaşımın kullanıldığı çalışmalar ve yöntemin temel varsayımlarının sağlanamadığı durumlarda kullanılan alternatif yöntemler ile ilgili çalışmalar olmak üzere iki sınıfa ayrılabilir.

Demireli ve Taner (2009), Dolar, Euro ve altın yatırımlarına eşit ağırlık vererek oluşturdukları portföyün riske maruz değeri parametrik varyans-kovaryans matris yaklaşımı, tarihsel simülasyon ve Monte Carlo simülasyon yöntemleri ile hesaplanmış, ardından marjinal riske maruz değer tutarını belirlemişlerdir. Çalışmada, riske maruz değer analizinde Monte-Carlo simülasyon yöntemi daha başarılı bulunmuştur.

[1]Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Doç. Dr., ugokal@erbakan.edu.tr, ORCİD İD: 0000-0002-9826-3460
[2]Necmettin Erbakan Üniversitesi FBE İstatistik Yüksek Lisans öğrencisi, yaseminkrglu@gmail.com, ORCİD İD: 0000-0001-9348-4021

Ural (2009), İMKB100 (Türkiye), FTSE100 (İngiltere), NIKKEI225 (Japonya) ve CAC40 (Fransa) borsa endekslerine ait günlük getiri serilerinde farklı hata dağılımları için alternatif riske maruz değer ve beklenen kayıp analizlerini gerçekleştirmiştir. Çalışmada geriye dönük test sonuçlarına göre, çoğunlukla şişman kuyruk ve asimetrik yapıya sahip finansal varlık getirileri için Cornish-Fisher yaklaşımına dayalı hesaplamaların daha tutarlı sonuçlar verdiği ifade edilmiştir.

Ural ve Adakale (2009), çok değişkenli normal dağılım varsayımı altında 11 şirket ve bu şirketlere ait 98 adet fonun 2007 yılı günlük kapanış fiyatlarını dikkate alarak parametrik yöntemle riske maruz değer analizi gerçekleştirmişlerdir. Çalışma sonucunda hisse senedi fonlarının toplam riskini en fazla arttıran, kamu borçlanma aracı fonlarının ise toplam riski en az arttıran fonlar olduğunu belirtmişlerdir.

Çatal ve Albayrak (2013), Dolar ve Euro portföylerinde, bağımlılık yapılarının birçok formda modellenmesine olanak veren kopulalar yardımı ile riske maruz değer analizini kullanmışlardır. Çalışmada kopulaların karmasına dayalı model, ki-kare uyum iyiliği testi sonuçlarında en başarılı model olarak belirlenmiştir.

Kocak ve diğerleri (2013), BIST-30 endeksinde yer alan beş hisse senedine eşit ağırlık vererek oluşturdukları portföyün riske maruz değer analizinde iki bileşenli çok değişkenli normal dağılımların karmasına dayalı modeli kullanmışlardır. Hata kareler ortalaması ve Kolmogorov Smirnov testi sonuçlarına göre karma dağılım modelinin riske maruz değeri hesaplamada daha başarılı olduğunu göstermişlerdir.

Finansal risk analizinde verilerin normal dağılım varsayımına uymadığı durumlarda, karma dağılım modeli yaklaşımı ile finansal risk hesaplanabilmektedir (Alexander, 2009). Karma dağılım modelleri birçok alanda rassallık içeren doğal olayların farklı özellikleri hakkında toplanan ölçüm değerlerine istatistiksel olarak model oluşturmada matematiksel bir yaklaşım sağlar (Mclachlan ve Peel, 2000). Çok değişkenli veriye istatistiksel modellemenin yapıldığı her alanda karma dağılım modeli kullanılabilir (Fraley,1998). Özellikle heterojen yapıdaki verilerin modellenmesinde karma dağılımların standart olasılık dağılımlarına göre daha kullanışlı olması kullanımını yaygın hale getirmiştir.

Sermaye piyasalarındaki risk yapısını tanımlamak için riske maruz değer Zhang ve Cheng (2005) tarafından ilk defa çok değişkenli normal dağılımın karması kullanılarak modellenmiştir. Zhang ve Cheng (2005) çalışmalarında Çin menkul kıymetler piyasaları ve Forex piyasaları için önerdikleri karma dağılım modeli ile ampirik olarak elde edilen sonuçları karşılaştırarak çok değişkenli normal dağılımların karmasına dayalı karma dağılım modellerinin riske maruz değerlerin modellenmesinde kullanılabilirliğini göstermişlerdir.

Hass (2009), riske maruz değerin modellenmesinde çok değişkenli normal ve t dağılımlarının karmasını kullanmıştır. Büyük Avrupa borsalarının günlük getirileri için riske maruz değerin karma dağılım modelleri ile modellendiği çalışmada, iki bileşenli karma çok değişkenli t dağılımının performansı daha başarılı bulunmuştur. Haas (2009), karma dağılım modelinde bileşen sayısının seçimi için BIC değerini kullanmıştır.

Chen ve Yu (2013), piyasa riski faktörleri yoğun olduğunda, riske maruz değer hesaplaması için doğrusal olmayan model olarak çok değişkenli normal dağılımların karmasına dayalı karma dağılım modelini önermişlerdir. Önerdikleri modelin etkinliğini, Çin pazarında işlem gören beş hisse senedinden oluşan portföyün riske maruz değerinin hesaplanmasında göstermişlerdir.

Wang ve Taaffe (2015), Monte-Carlo simülasyon yöntemi ile riske maruz değer hesaplamasında çok değişkenli normal dağılımların karmasını kullanmışlardır. Finansal varlıkların günlük getirilerin normal dağılmaması ve portföy üzerindeki etkilerinin doğrusal olmaması durumunda çok değişkenli normal dağılımların karmasının kullanılmasının yararlı olduğunu ifade etmişlerdir.

Bu çalışmada RMD yönteminin temel varsayımı, finansal varlıkların normal dağılım göstermesi ve portföye olan etkilerinin doğrusal olma varsayımının sağlanmadığı durumda çok değişkenli normal dağılımın karmasına dayalı olarak karma RMD hesaplanacaktır. Karma dağılım modelinde uygun bileşen sayısının Akaike ve Bayesci bilgi kriterleri kullanılarak belirlendiği çalışmada, karma dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri EM algoritması kullanılarak elde edilecektir. Çok değişkenli normal dağılımların karmasına dayalı karma RMD değeri tanımlandıktan sonra BIST teknoloji endeksinden alınan dört teknoloji firması hisselerinin ve bu hisselerden eşit ağırlıklar ile oluşturulan portföyün RMD analizi gerçekleştirilecektir.

## 2. RİSKE MARUZ DEĞER

Riske maruz değer (RMD), normal piyasa koşullarında belirli bir güven aralığında belirli bir zaman sürecinde meydana gelebilecek beklenen en kötü kaybı ölçen finansal bir araç olarak ifade edilmektedir (Philippe, 2007). Kısaca RMD zarar etme riskinin parasal bir ölçüsüdür. RMD hesaplamaları, hisse senedi bazında yapabildiği gibi portföy bazında da yapılabilmektedir. Portföyde farklı pozisyonlardan ve risk faktörlerinden kaynaklanan riskler oluşabilmektedir. RMD bu riskleri bir araya getirip tek bir değerle ifade edebilmektedir.

RMD hesaplanmasına ilişkin geliştirilen modeller parametrik ve parametrik olmayan modeller olarak sınıflandırılabilir. RMD hesaplamalarında parametrik modeller risk faktör dağılımlarının istatistiksel parametrelerini esas alırken parametrik olmayan modeller simülasyon ve tarihsel model olmak üzere ikiye ayrılır (Ammann ve Reich, 2001).

Parametrik yöntem, varyans-kovaryans yöntemi olarak da adlandırılmaktadır. Bu yöntemin temel varsayımı, finansal varlık getirilerinin normal dağılıma sahip ve portföy değeri üzerindeki etkisinin doğrusal olduğu yönündedir. Bir finansal varlığın RMD'si

$$RMD = (\mu + z_{1-\alpha}\sigma\sqrt{t})A$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $\mu$ ortalamayı, $\sigma$ standart sapmayı, $\sqrt{t}$ elde tutma süresini, $A$ yatırım miktarını ve $z_{1-\alpha}$ gösterimi $(1-\alpha)$ güven aralığına karşılık gelen standart normal dağılıma ait tablo değerini göstermektedir.

Portföyün RMD'si,

$$RMD_{portföy} = (\mu_{portföy} + z_{1-\alpha}\sigma_{portföy}\sqrt{t})A$$

eşitliği ile hesaplanır. Eşitlikte yer alan $\mu_{portföy}$ ve $\sigma_{portföy}$ gösterimleri sırasıyla portföyün ortalamasını ve standart sapmasını göstermektedir. $\mu_{portföy}$ ve $\sigma_{portföy}$ değerleri, hisse senetlerinin portföydeki ağırlıklarından oluşan ağırlık vektörü $\mathbf{w} = [w_1 \quad \cdots \quad w_p]$, portföyde yer alan hisse senetlerin ortalamalarından oluşan ortalama vektörü $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \cdots \quad \mu_p]$ ve $p$ adet hisse senetinin günlük değişimden oluşan çok boyutlu veri için varyans kovaryans matrisi $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\mu_{portföy} = \mathbf{w}\boldsymbol{\mu}'$$

$$\sigma_{portföy} = (\mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}')^{\frac{1}{2}}$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

## 3. KARMA DAĞILIM MODELİ

İki ya da daha fazla bileşenden oluşan dağılımlar, karma dağılımlar olarak adlandırılır. Karma dağılım modelleri birçok alanda rassallık içeren doğal olayların farklı özellikleri hakkında toplanan ölçüm değerlerine istatistiksel olarak model oluşturmada matematiksel bir yaklaşım sağlar. Sonlu karma dağılım modellerinde kitle içerisinde $k$ $(\geq 2)$ tam sayı olmak üzere, $k$ tane farklı bileşen olduğu varsayımı yapılır. Sonlu karma dağılım modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(\mathbf{x};\ \pi_1, \dots, \pi_k, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_k) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i f_i(\mathbf{x};\ \boldsymbol{\theta}_i)$$

olarak tanımlanır. Eşitlikte $\pi_i$, $\pi_i \in (0,1)$ ve $\sum_{i=1}^{k}\pi_i = 1$ koşuluyla karma ağırlıkları, $\mathbf{x}$ $p$ boyutlu rassal vektörü, $\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}$ bilinmeyen parametre vektörünü ve $f_i(\mathbf{x};\ \boldsymbol{\theta}_\mathbf{i})$ ise $\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}$ bilinmeyen parametre vektörü ile karakterize edilen $i$. bileşene ait olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. Birçok uygulamada bileşenlere ait olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak çok değişkenli normal dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_i(\mathbf{x};\ \boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\sqrt{|\Sigma_i|}}exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)\Sigma_i^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_i)'\right\}$$

kullanılır. Burada $i = 1, \dots, k$ olmak üzere $\boldsymbol{\mu}_i$ $i$. bileşene ait ortalama vektörünü ve $\Sigma_i$ $i$. bileşene ait varyans-kovaryans matrisini göstermektedir. Bileşenlerin çok değişkenli normal dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tanımlandığı karma dağılım modelleri çok değişkenli normal dağılımların karması olarak isimlendirilir.

### 3.1. Parametre Tahmini

Karma dağılım modeli varsayımında, gözlem vektörlerinin hangi bileşene ait olduğu bilinmediğinden dolayı veri tamamlanmamış veri durumundadır. Bundan dolayı karma dağılım modeline ait parametrelerinin en çok olabilirlik tahminlerini elde etmek için genellikle EM (Expectation Maximization) algoritması kullanılır. EM algoritması, E beklenti ve M maksimum yapma adımlarından oluşan döngüsel (iteratif) bir algoritmadır.

EM algoritmasının $(r+1)$. adımında çok değişkenli normal dağılımların karmasının parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri $i = 1, \dots, k$ ve örneklem hacmi $n$ olmak üzere,

$$\pi_i^{(r+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\tau_i\left(\mathbf{x}_\mathbf{j}, \boldsymbol{\theta}_i^{(r)}\right)}{n}$$

$$\boldsymbol{\mu}_i^{(r+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\tau_i\left(\mathbf{x}_\mathbf{j}, \boldsymbol{\theta}_i^{(r)}\right)\mathbf{x}_\mathbf{i}}{\sum_{j=1}^{n}\tau_i\left(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\theta}_i^{(r)}\right)}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_i^{(r+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\tau_i\left(\mathbf{x}_\mathbf{j}, \boldsymbol{\theta}_i^{(r)}\right)\left(\mathbf{x}_\mathbf{j}-\boldsymbol{\mu}_i^{(r)}\right)\left(\mathbf{x}_\mathbf{j}-\boldsymbol{\mu}_i^{(r)}\right)'}{\sum_{j=1}^{n}\tau_i\left(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\theta}_i^{(r)}\right)}$$

eşitlikleri ile elde edilir. Eşitlikte yer alan $\tau_i(\mathbf{x}_\mathbf{j}, \boldsymbol{\theta}_i)$ gösterimi $\mathbf{x}_\mathbf{j}$ gözlem vektörünün $i$. bileşene ait olma önsel olasılığını gösterir ve $\tau_i(\mathbf{x}_\mathbf{j}, \boldsymbol{\theta}_i) = \frac{\pi_i f_i(\mathbf{x}_\mathbf{j}; \mu_i, \Sigma_i)}{\sum_{l=1}^{k}\pi_l f_l(\mathbf{x}_\mathbf{j}; \mu_l, \Sigma_l)}$ eşitliği ile hesaplanır.

### 3.2. Karma Dağılım Modelinde Uygun Bileşen Sayısının Seçimi

Karma dağılım modellerinde uygun bileşen sayısı $k$'nın seçiminde genel olarak logaritmik olabilirlik fonksiyonunu temel alan Akaike bilgi kriteri ($AIC$) ve Bayesci bilgi kriteri ($BIC$) kullanılmaktadır (Akogul ve Erisoglu, 2016). $AIC$ ve $BIC$ değerleri

$$AIC = -2lnL + 2d$$

$$BIC = -2lnL + dln(n)$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Eşitlikte yer alan $d$ serbest parametre sayısını göstermektedir. Karma dağılım modellerinde uygun bileşen sayısı,

$$AIC(k) \leq AIC(k+1), \qquad k = 1,2,\dots$$

$$BIC(k) \leq BIC(k+1), \qquad k = 1,2,\dots$$

seçilen bilgi kriterine göre ilgili eşitsizliği ilk sağlayan $k$ değeridir.

### 3.3. Çok Değişkenli Normal Dağılımların Karması İle Riske Maruz Değer

Varyans-kovaryans yönteminin finansla varlıkların normal dağılma sahip olmaması veya portföy üzerindeki etkilerinin doğrusal olmaması durumunda, karma dağılım modelleri kullanılarak RMD hesaplanabilmektedir (Zhang ve Cheng 2005, Haas 2009, Chen ve Yu 2013). Farklı riske sahip finansal yatırım araçlarından oluşan portföyün RMD'i, çok değişkenli normal dağılımların karmasına dayalı olarak

$$Karma\ RMD_{portföy} = A\sum_{i=1}^{k}\pi_i\left(\mu_{portföy,i} + z_{1-\alpha}\sigma_{portföy,i}\sqrt{t}\right)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır. Eşitlikte yer alan $\mu_{portföy,i}$ ve $\sigma_{portföy,i}$ gösterimleri sırasıyla karmanın $i$. bileşenine ait portföyün ortalama ve standart sapmasını göstermektedir ve

$$\mu_{portföy,i} = \mathbf{w}\boldsymbol{\mu}_i'$$

$$\sigma_{portföy,i} = (\mathbf{w}\Sigma_i\mathbf{w}')^{\frac{1}{2}}$$

eşitlikleri ile hesaplanmaktadır. Burada $\mathbf{w}$ ağırlık vektörü, $\boldsymbol{\mu}_i = \left[\mu_1^{(i)} \quad \dots \quad \mu_p^{(i)}\right]$ karmanın $i$. bileşenine ait ortalama vektörü ve $\Sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(i)} & \dots & \sigma_{1p}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1}^{(i)} & \dots & \sigma_{pp}^{(i)} \end{bmatrix}$ karmanın $i$. bileşenine ait varyans-kovaryans matrisini göstermektedir.

## 4. UYGULAMA

Çalışmada 1 Mart 2016- 31 Ağustos 2018 tarihleri arasında BIST teknoloji endeksinde yer alan İndeks Bilgisayar Sistemleri Mühendislik Sanayi ve AS (INDES), Arena Bilgisayar Sanayi ve Ticaret AS (ARENA), Karel Elektronik Sanayi ve Ticaret AS (KAREL), Netas Telekomünikasyon AS (NETAS) teknoloji şirketlerine ait hisse senetleri ve her bir hisse senedine eşit ağırlık vererek oluşturulan portföyün günlük değişimleri için RMD analizi gerçekleştirilecektir. Veri seti www.investing.com adresinden elde edilmiştir.

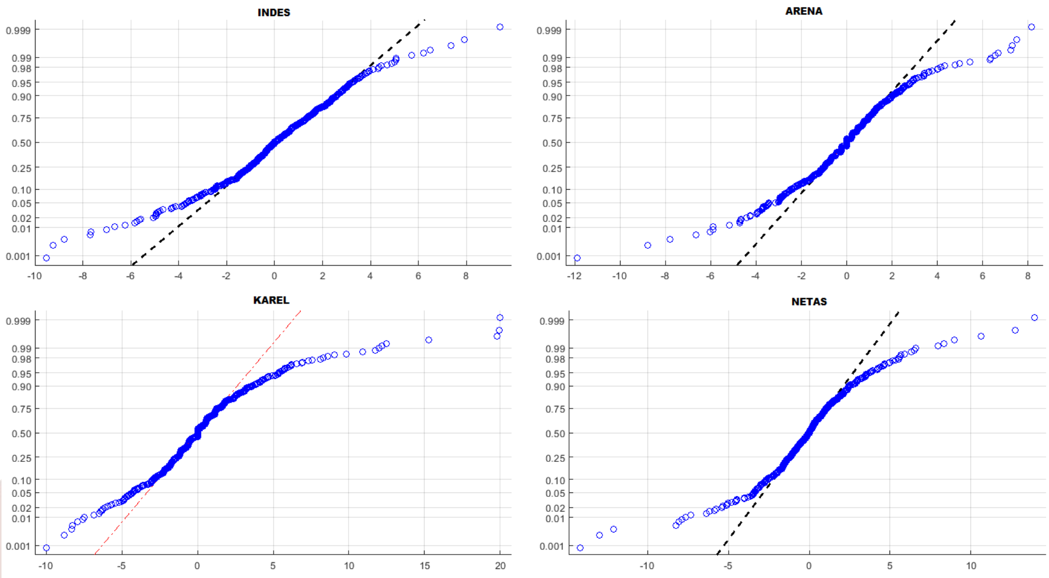
Hisse senetleri ve portföye ait tanımlayıcı istatistikler ve Kolmogorov-Smirnov (K-S) normallik testi sonuçları Tablo 1'de verilmiştir.

**Tablo 1.** Hisse senetleri ve portföye ait tanımlayıcı istatistikler ve K-S normallik testi sonuçları

| | INDES | ARENA | KAREL | NETAS | PORTFÖY |
|---|---|---|---|---|---|
| **Ortalama** | 0.026 | -0.067 | 0.237 | -0.019 | 0.045 |
| **Std. Sapma** | 2.212 | 1.992 | 3.209 | 2.511 | 1.689 |
| **Değişim Katsayısı** | 83.511 | 29.818 | 13.544 | 135.7 | 37.957 |
| **En Küçük** | -9.53 | -11.9 | -10 | -14.18 | -9.253 |
| **En Büyük** | 9.41 | 8.16 | 20 | 13.95 | 6.653 |
| **Çarpıklık** | -0.385 | -0.243 | 1.568 | -0.035 | -0.562 |
| **Basıklık** | 5.385 | 7.223 | 11.016 | 9.632 | 6.284 |
| **K-S** | 0.169 | 0.113 | 0.184 | 0.147 | 0.098 |
| **p değeri** | $< 0.001$ | $< 0.001$ | $< 0.001$ | $< 0.001$ | $< 0.001$ |

Değişim katsayısına göre değişimin en fazla olduğu seri NETAS, en düşük olduğu seri ise KAREL hisse senedine aittir. Çarpıklık açısından KAREL dışındaki serilerin negatif (sağa) çarpık olduğu görülmektedir. KAREL serisi pozitif (sola) çarpıktır ve en büyük asimetri değerine sahiptir. Basıklık açısından, tüm serilerin 3'den büyük değerlere sahip olduğu ve serilerin aşırı basıklığa sahip olduğu görülmektedir. Bu nedenle tüm hisse senetlerinin günlük getiri değerleri kalın kuyruk (fat tail) yapısına sahiptir. K-S testi sonuçlarına göre tüm serilerin normal dağılıma sahip olmadığı ($p < 0.001$) belirlenmiştir. Tablo 1'de en son sütunda yer alan değerler incelendiğinde, hisse senetlerine eşit ağırlık verilerek oluşturulan portföyün günlük getiri değerlerinin negatif (sağa) çarpık, kalın kuyruklu ve normal dağılıma sahip olmadığı görülmektedir.

Hisse senetlerinin günlük değişimlerinin normal dağılıma uyumunu grafiksel olarak görmek için Şekil 1'de Q-Q normallik grafikleri oluşturulmuştur.




**Şekil 1:** Hisse senetlerine ait Q-Q normallik grafikleri

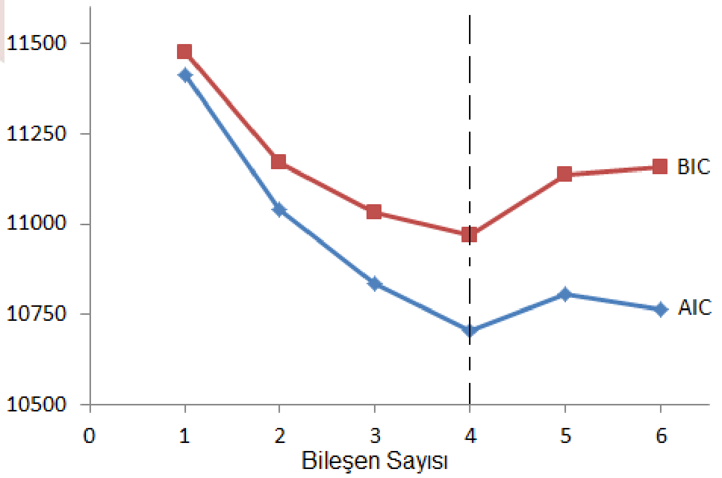
Şekil 1'deki grafiklerde hisse senetlerinin günlük değişimlerinin dağılım çizgileri standart normal dağılım çizgilerinden farklı seyir etmektedir ve bu durumda verilerin normal dağılıma uymadığı söylenebilir.

Finansal varlıkların normallik varsayımı sağlanmadığından dolayı varyans-kovaryans yaklaşımında çok değişkenli normal dağılımların karması yaklaşımı kullanılacaktır. Karma dağılım modelinde öncelikle uygun bileşen sayısının seçimi gerçekleştirilecektir. Farklı bileşen sayılarına göre negatif doğal logaritmik olabilirlik fonksiyon değeri $(-lnL)$, $AIC$, $BIC$ ve $d$ değerleri Tablo 2'de verilmiştir.

**Tablo 2.** Bileşen sayısına göre $-lnL$, $AIC$, $BIC$ ve $d$ değerleri.

| **Bileşen Sayısı** | $-lnL$ | $AIC$ | $BIC$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5691.492 | 11410.98 | 11473.20 | 14 |
| 2 | 5490.289 | 11038.58 | 11167.46 | 29 |
| 3 | 5374.002 | 10836.00 | 11031.54 | 44 |
| 4 | 5294.026 | 10706.05 | 10968.26 | 59 |
| 5 | 5329.052 | 10806.10 | 11134.97 | 74 |
| 6 | 5292.399 | 10762.80 | 11158.33 | 89 |

Bileşen sayısına göre $AIC$ ve $BIC$ değerleri için elde edilen çizgi grafiği Şekil 2'de verilmiştir.



**Şekil 2.** Bileşen sayısına göre $AIC$ ve $BIC$ değerlerine ait çizgi grafiği

Şekil 2 incelendiğinde $AIC$ ve $BIC$ değerlerini ilk minimum yapan uygun bileşen sayısının her iki kriterde de 4 olduğu anlaşılmaktadır. Uygun bileşen sayısının belirlenmesinin ardından portföye ilişkin klasik çok değişkenli normal dağılım modeli $(k = 1)$ ve karma çok değişkenli normal dağılım modeline $(k = 4)$ ait en çok olabilirlik tahminleri Tablo 3'de verilmiştir.

**Tablo 3.** Klasik çok değişkenli normal dağılım modeli $(k = 1)$ ve karma çok değişkenli normal dağılım modeline $(k = 4)$ göre en çok olabilirlik tahminleri

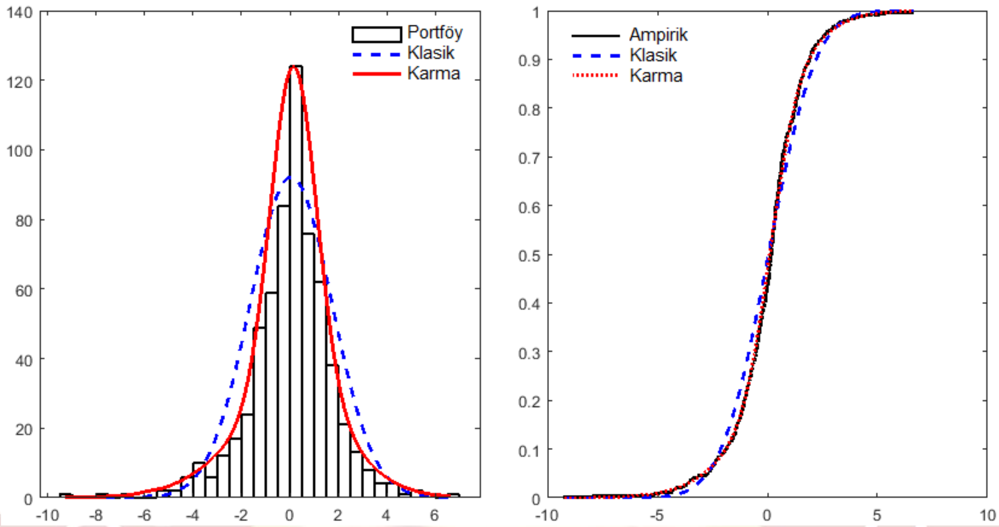
| $k = 1$ | | | | | $k = 4$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\pi}$ | 1.0000 | | | | $\hat{\pi}_1$ | 0.2118 | | | |
| $\hat{\mu}$ | 0.0265 | -0.0668 | 0.2369 | -0.0185 | $\hat{\mu}_1$ | -0.2688 | -0.2097 | 2.0521 | -0.2718 |
| $\hat{\Sigma}$ | 4.8926 | 1.2872 | 1.9314 | 1.7059 | $\hat{\Sigma}_1$ | 3.0289 | 1.4157 | 3.2659 | 1.3553 |
| | 1.2872 | 3.9699 | 1.7352 | 1.5976 | | 1.4157 | 1.8777 | 1.9724 | 1.6257 |
| | 1.9314 | 1.7352 | 10.2946 | 1.8369 | | 3.2659 | 1.9724 | 29.0978 | 1.3393 |
| | 1.7059 | 1.5976 | 1.8369 | 6.3062 | | 1.3553 | 1.6257 | 1.3393 | 4.0702 |
| | | | | | $\hat{\pi}_2$ | 0.5747 | | | |
| | | | | | $\hat{\mu}_2$ | 0.4268 | 0.1191 | -0.0463 | 0.0891 |
| | | | | | $\hat{\Sigma}_2$ | 2.7809 | 0.2618 | 0.5443 | 0.4698 |
| | | | | | | 0.2618 | 1.8498 | 0.4698 | 0.4065 |
| | | | | | | 0.5443 | 0.4698 | 2.2436 | 0.5667 |
| | | | | | | 0.4698 | 0.4065 | 0.5667 | 1.8874 |
| | | | | | $\hat{\pi}_3$ | 0.2072 | | | |
| | | | | | $\hat{\mu}_3$ | -0.7222 | -0.4562 | -0.7835 | 0.2606 |
| | | | | | $\hat{\Sigma}_3$ | 11.3315 | 3.6615 | 4.4439 | 4.9883 |
| | | | | | | 3.6615 | 11.5745 | 5.1326 | 4.8822 |
| | | | | | | 4.4439 | 5.1326 | 8.9116 | 6.2914 |
| | | | | | | 4.9883 | 4.8822 | 6.2914 | 17.1853 |
| | | | | | $\hat{\pi}_4$ | 0.0064 | | | |
| | | | | | $\hat{\mu}_4$ | -1.9250 | 0.5750 | -1.3925 | 10.3975 |
| | | | | | $\hat{\Sigma}_4$ | 7.3685 | -4.3770 | 0.5282 | -2.1040 |
| | | | | | | -4.3770 | 7.3712 | -1.4148 | 8.0901 |
| | | | | | | 0.5282 | -1.4148 | 0.4395 | -1.9335 |
| | | | | | | -2.1040 | 8.0901 | -1.9335 | 10.6900 |

Portföyün istatistiksel olarak modellenmesinde klasik ve karma dağılım yaklaşımlarını başarısı hata kareler ortalaması $(MSE)$ ve K-S testi ile incelenmiş olup elde edilen sonuçlar Tablo 4'de verilmiştir.

**Tablo 4.**Hisse senetlerine ait portföy için normal ve karma normal dağılım modellerine ait MSE ve K-S test istatistiği değerleri

| **Yöntem** | **MSE** | **K-S Testi** | |
|---|---|---|---|
| | | **K-S** | **p değeri** |
| **Klasik** | 0.0019 | 0.0752 | 0.0015 |
| **Karma Dağılım** | **0.00018** | **0.0367** | **0.3574** |

Tablo 4 incelendiğinde portföyün klasik yaklaşım ile modellenmesi durumunda $MSE$ değerinin daha büyük ve K-S testi sonucunda modellemenin başarısız olduğu $(p = 0.0015 < \alpha = 0.05)$ görülmektedir. Karma dağılım yaklaşımında ise portföyün modellemesinin başarılı olduğu ( $p = 0.3514 > \alpha = 0.05$) ve $MSE$ değerinin daha küçük olduğu görülmektedir. Tablo 4'e göre portföyün modellenmesinde, karma dağılım yaklaşımı daha başarılıdır. Portföyün klasik ve karma dağılım yaklaşımı ile modellenmesinin grafiksel karşılaştırılması Şekil 3'de verilmiştir.




**Şekil 3.** Portföyün istatistiksel modellenmesinde klasik ve karma dağılım yaklaşımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonu eğrileri ve birikimli dağılım fonksiyon eğrileri ile karşılaştırılması

Portföyün istatistiksel modellenmesinde klasik ve karma dağılım yaklaşımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonu eğrileri ve birikimli dağılım fonksiyon eğrileri incelendiğinde karma dağılım yaklaşımının klasik yaklaşıma göre daha başarılı olduğu açıkça görülmektedir.

Her bir hisse senedi ve hisse senetlerinden oluşturulan portföy için klasik ve karma dağılım yaklaşımları ile RMD değerleri hesaplanarak Tablo 5'de verilmiştir.

**Tablo 5:** Hisse senetleri ve portföy için RMD ve Karma RMD değerleri

| | **RMD** | **Karma RMD** | $w$ |
|---|---|---|---|
| INDES | 4.3618 | 2.6699 | $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ |
| ARENA | 3.8384 | 2.4257 | $[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$ |
| KAREL | 6.5256 | 4.3219 | $[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$ |
| NETAS | 4.9035 | 3.0681 | $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ |
| PORTFÖY | 3.3553 | 2.9787 | $[0.25 \quad 0.25 \quad 0.25 \quad 0.25]$ |

Klasik parametrik yöntemle hesaplanan RMD değerlerinin karma dağılım yöntemi ile elde edilen RMD değerlerinden daha büyük olduğu görülmektedir. Verinin modellenmesinde karma dağılım yaklaşımının daha başarılı olduğu gösterildiğinden klasik parametrik yöntem ile RMD değerinin olduğundan daha büyük hesaplandığı söylenebilir. Karma RMD değerleri incelendiğinde hisse senetleri içerisinde KAREL hisse senedinin en fazla riske sahip hisse senedi olduğu, en az riske sahip hisse senedinin ise ARENA hisse senedi olduğu görülmektedir. Her bir hisse senedine eşit ağırlık verilerek oluşturulan portföyün karma RMD değeri 2.9787 olarak hesaplanmıştır. RMD değeri küçük olan hisse senetlerine daha fazla, RMD değeri daha yüksek hisse senetlerine daha az ağırlık verilerek oluşturulan portföylerde RMD değeri daha da düşürülebilir.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada RMD hesaplama yöntemi olan varyans-kovaryans yaklaşımının temel varsayımının sağlanmadığı durumda çok değişkenli normal dağılımların karması yaklaşımı ile RMD hesaplanmıştır. Karma çok değişkenli normal dağılım modelinin parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri için EM algoritması verilmiş ve karma dağılımda uygun bileşen sayısı $AIC$ ve $BIC$ kriterleri ile belirlenmiştir. BIST teknoloji endeksinde yer alan dört hisse senedinin ve her hisse senedine eşit ağırlık verilerek oluşturulan portföyün RMD analizinde klasik yaklaşım ve karma dağılım yaklaşımı karşılaştırılmıştır. K-S testi ve hata kareler ortalamasına göre portföyün istatistiksel modellenmesinde karma dağılım yaklaşımının klasik yaklaşımdan daha başarılı olduğunu görülmüştür. Varyans-kovaryans yaklaşımında finansal varlıkların normallik ve portföye olan etkilerinin doğrusal olması varsayımının sağlanmadığı durumlarda klasik yaklaşım ile elde edilen RMD'lerin olduğundan daha büyük hesaplandığı belirlenmiştir.

**Kaynaklar**

Akogul, S. and Erisoglu, M. (2016). A comparison of information criteria in clustering based on mixture of multivariate normal distributions. *Mathematical and Computational Applications*, 21(3): 34.

Alexander, C. (2009). *Market Risk Analysis*, *Value at Risk Models (Vol. 4).* John Wiley & Sons.

Ammann, M. and Reich, C. (2001). VaR for nonlinear financial instruments—linear approximation or full Monte Carlo?. *Financial Markets and Portfolio Management*, 15(3): 363-378.

Basak, S. and Shapiro, A. (2001). Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices. *The review of financial studies*, 14(2): 371-405.

Chen, R. and Yu, L. (2013). A novel nonlinear value-at-risk method for modeling risk of option portfolio with multivariate mixture of normal distributions. *Economic Modelling*, 35: 796-804.

Çatal, D. ve Albayrak, R. S. (2013). Riske maruz değer hesabında karışım Kopula kullanımı: Dolar-Euro portföyü. *Journal of Yasar University*, 8(31): 5187-5202.

Demireli, E. ve Taner, B. (2009). Risk Yönetiminde Riske Maruz Değer Yöntemleri ve Bir Uygulama. *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 14(3): 127-148.

Fraley, C. (1998). Algorithms for model-based Gaussian hierarchical clustering. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1): 270-281.

Haas, M. (2009). Value-at-Risk via mixture distributions reconsidered. *Applied Mathematics and Computation*, 215(6): 2103-2119.

Kocak, K., Calis, N. and Unal, D. (2013). Mixture distribution approach in financial risk analysis. *Journal of Business Economics and Finance*, 2(3): 75-86.

Mclachlan, G. and Peel, D. (2000), *Finite Mixture Models*, Wiley series in probability and statistics: Applied probability and statistics. Wiley.

Morgan J. P. (1995). *RiskMetrics-Technical Manual*. Third edition. New York.

Ural, M. (2009). Riske Maruz Değer Hesaplamasında Alternatif Yaklaşımlar. *Journal of BRSA Banking & Financial Markets*, 3(2).

Ural, M. ve Adakale, T. (2009). Bireysel emeklilik fonlarında risk yönetimi ve riske maruz değer analizi. *Ege Akademik Bakış Dergisi*, 9(4): 1463-1483.

Philippe, J. (2007). *Value at risk: the new benchmark for managing financial risk*. Third edition. NY: McGraw-Hill Professional.

Wang, J. and Taaffe, M. R. (2015). Multivariate mixtures of normal distributions: properties, random vector generation, fitting, and as models of market daily changes. *INFORMS Journal on Computing*, 27(2): 193-203.

Zhang, M. H. and Cheng, Q. S. (2005). An approach to VaR for capital markets with Gaussian mixture. *Applied mathematics and computation*, 168(2): 1079-1085.

www.investing.com